

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 3$ și numărul

$$S = \frac{1}{f(0) \cdot f(1)} + \frac{1}{f(1) \cdot f(2)} + \dots + \frac{1}{f(n-1) \cdot f(n)}, n \geq 1.$$

a) Verificați egalitatea: $\frac{1}{(5n-2) \cdot (5n+3)} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right), \forall n \geq 1.$

b) Demonstrați că $S = \frac{n}{15n+9}, \forall n \geq 1.$

c) Să se determine numărul natural n , astfel încât $\frac{1}{\sqrt{S}}$ să fie număr natural.

2. Doi elevi citesc câte o carte astfel:

Primul citește în prima zi două pagini, apoi în fiecare zi citește un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. Al doilea elev, citește în prima zi 3 pagini, a doua zi 12 pagini și în fiecare dintre zilele următoare cu $3p$ pagini mai mult decât în ziua precedentă, unde p este numărul cu 1 mai mic decât dublul numărului zilei curente.

a) Demonstrați că, în a n -a zi, primul elev citește 2^n pagini, iar cel de-al doilea elev citește $3n^2$ pagini, utilizând metoda inducției matematice, $n \geq 1$.

b) Stabiliți, începând cu ce zi, primul elev va citi un număr de pagini mai mare decât numărul de pagini citite de al doilea elev.

3. Fie mulțimea $A = \{(x, a) \mid 2x^2 - 2ax + x + a^2 - 2a = 0, x \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}\}$.

a) Să se determine a , dacă $(1, a) \in A$.

b) Să se determine x , dacă $(x, 1) \in A$.

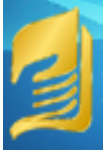
c) Să se determine mulțimea A , știind că aceasta are cel puțin un element.

4. În triunghiul ABC , fie punctele M, N și P astfel încât: $\overline{4MC} = \overline{AC}, \overline{BN} + \overline{CN} = \overline{0}, 2\overline{PB} = \overline{BA}$.

a) Demonstrați că $\overline{MN} = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{CB})$.

b) Demonstrați că punctele M, N și P sunt coliniare.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic

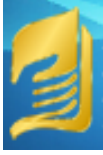


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

- Se consideră funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 4z - \bar{z}$, unde \bar{z} reprezintă conjugatul numărului complex z .
 - Determinați $z \in \mathbb{C}$, dacă $f(z) = 2013 + 2015 \cdot i$.
 - Calculați $(f \circ f)(z)$.
 - Demonstrați că funcția dată este bijectivă.
- Plecat în vacanță împreună cu părinții, în mașina familiei, Costel a adormit după ce a constatat că trecuseră 342 de kilometri de la plecare. După ce s-a trezit a constatat amuzat că numărul kilometrilor parcurși, de la plecare, era tot un număr par care se putea forma cu aceleași cifre ca și numărul kilometrilor văzuți înainte de a adormi.
 - Câți km au fost parcurși până în momentul trezirii lui Costel ?
 - După ce a văzut că dormise 90 de minute, precizați viteza medie cu care s-a deplasat mașina cât timp a dormit Costel, știind că nu a făcut nici o oprire.
- Se consideră următoarele șiruri de numere $x_n = \frac{2013^n + 2012n - b}{a}$ și $y_n = \frac{2013^n - 2012n + b}{a}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$ (arbitrar fixați), iar $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $(z_n)_{n \geq 1}$ este un șir de numere reale astfel încât $z_n = x_n - y_n$, se cere:
 - Demonstrați că șirul $(z_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică.
 - Demonstrați că raportul $\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{x_n + y_n}$ nu depinde de n .
- Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.
 - Rezolvați ecuația $2 \cdot f(3x) = 5$.
 - Determinați valorile parametrului real m știind că ecuația $f(x) = m$ admite o singură rădăcină reală.
 - Rezolvați ecuația $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$, în mulțimea numerelor reale.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic

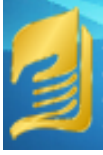


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

- Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\det(A - xI_2) = 0$.
 - Determinați valorile parametrilor reali m și n dacă $A^3 = m \cdot A + n \cdot I_2$.
 - Demonstrați că $A^{2013} + A^{2012} = 2^{2012} \cdot (A + I_2)$.
- O matrice pătratică de ordinul al treilea are toate elementele egale cu 1, 2 sau 3 (cel puțin câte unul din fiecare). Știind că suma tuturor elementelor matricei este egală cu 17, iar numărul elementelor egale cu 1 este cel puțin patru, se cere:
 - Să se afle câte elemente sunt din fiecare?
 - Exemplificați că printre matricele anterior determinate există atât matrice neinvertabile cât și matrice invertabile.
- Se consideră funcția $f_k : (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = \sqrt{x^2 + x} - k \cdot x$, unde k este un număr real fixat.
 - Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2012}(x)}{f_{2013}(x)}$.
 - Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1$
- Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
 - Determinați asimptotele verticale ale funcției.
 - Determinați asimptotele către $+\infty$ ale funcției.
 - Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ admite cel puțin o rădăcină subunitară.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

Filiera tehnologică : profil tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XII-A

1. a) Calculați $F(x) = \int \frac{1}{2^x + 3} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{\log_2 3}^{\log_2 5} \frac{1}{2^x + 3} dx$.

c) Demonstrați că $F(x)$ este o funcție injectivă pe mulțimea \mathbb{R} .

2. Pe mulțimea $K = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $(a, x) \circ (b, y) = (ab, x + ay)$, pentru orice perechi $(a, x), (b, y) \in K$.

a) Verificați asociativitatea legii de compoziție.

b) Determinați perechea $(a, x) \in K$ care verifică relația $\underbrace{(a, x) \circ \dots \circ (a, x)}_{\text{de 9 ori}} = (512, -511)$.

c) Dați exemplu de o pereche $(a, x) \in K$ care să nu comute cu perechea $(2012, -2013)$.

3. Fie funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite astfel : $f_1(x) = x$, iar $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$, $n \geq 1$.

a) Demonstrați că $f_3(x) = \frac{x^3}{6}$.

b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, pentru orice număr natural nenul n .

4. a) Determinați soluțiile ecuației $x^3 = x$, în inelul $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$.

b) Numim "potrivită" o tripletă de tipul $(\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{c})$ cu $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_4$ și $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \hat{0}$. Determinați

tripletele "potrivite" de tipul $(\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{2})$.

c) Câte triplete "potrivite" există ?

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.