CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x+3$ şi numărul

$$S=\frac{1}{f(0)\cdot f(1)}+\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}+\ldots+\frac{1}{f(n-1)\cdot f(n)}, n\ge 1.$$

a) Verificați egalitatea: $\dfrac{1}{(5n-2)\cdot(5n+3)}=\dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{5n-2}-\dfrac{1}{5n+3}\right), \forall n\ge 1$.

b) Demonstrați că $S=\dfrac{n}{15n+9}, \forall n\ge 1$.

c) Să se determine numărul natural n, astfel încât $\dfrac{1}{\sqrt{S}}$ să fie număr natural.

2. Doi elevi citesc câte o carte astfel:
Primul citeşte în prima zi două pagini, apoi în fiecare zi citeşte un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. Al doilea elev, citeşte în prima zi 3 pagini, a doua zi 12 pagini şi în fiecare dintre zilele următoare cu **3p** pagini mai mult decât în ziua precedentă, unde **p** este numărul cu 1 mai mic decât dublul numărului zilei curente.
a) Demonstrați că, în a n-a zi, primul elev citeşte 2^n pagini, iar cel de-al doilea elev citeşte $3n^2$ pagini, utilizând metoda inducției matematice, $n\ge 1$.
b) Stabiliți, începând cu ce zi, primul elev va citi un număr de pagini mai mare decât numărul de pagini citite de al doilea elev.

3. Fie mulțimea $A=\left\{(x,a)\,\middle|\,2x^2-2ax+x+a^2-2a=0,\ x\in Z,\ a\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se determine a, dacă $(1, a)\in A$.
b) Să se determine x, dacă $(x, 1)\in A$.
c) Să se determine mulțimea A, ştiind că aceasta are cel puțin un element.

4. În triunghiul ABC, fie punctele M, N şi P astfel încât: $4\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0},\ 2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BA}$.

a) Demonstrați că $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

b) Demonstrați că punctele M, N şi P sunt coliniare.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A X-A

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=4z-\bar{z}$, unde $\bar{z}$ reprezintă conjugatul numărului complex z.
a) Determinaţi $z\in\mathbb{C}$, dacă $f(z)=2013+2015\cdot i$.
b) Calculaţi $(f\circ f)(z)$.
c) Demonstraţi că funcţia dată este bijectivă .

2. Plecat în vacanţă împreună cu părinţii, în maşina familiei, Costel a adormit după ce a constatat că trecuseră 342 de kilometri de la plecare. După ce s-a trezit a constatat amuzat că numărul kilometrilor parcurşi, de la plecare, era tot un număr par care se putea forma cu aceleaşi cifre ca şi numărul kilometrilor văzuţi înainte de a adormi.
a) Câţi km au fost parcurşi până în momentul trezirii lui Costel ?
b) După ce a văzut că dormise 90 de minute, precizaţi viteza medie cu care s-a deplasat maşina cât timp a dormit Costel, ştiind că nu a făcut nici o oprire .

3. Se consideră următoarele şiruri de numere $x_n=\dfrac{2013^n+2012n-b}{a}$ şi $y_n=\dfrac{2013^n-2012n+b}{a}$, unde $a, b\in\mathbb{R}^*$ (arbitrar fixaţi), iar $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă $(z_n)_{n\ge1}$ este un şir de numere reale astfel încât $z_n=x_n-y_n$, se cere:
a) Demonstraţi că şirul $(z_n)_{n\ge1}$ este progresie aritmetică.
b) Demonstraţi că raportul $\dfrac{x_{n+1}+y_{n+1}}{x_n+y_n}$ nu depinde de n .

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.
a) Rezolvaţi ecuaţia $2\cdot f(3x)=5$.
b) Determinaţi valorile parametrului real m ştiind că ecuaţia f(x) = m admite o singură rădăcină reală .
c) Rezolvaţi ecuaţia $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$, în mulţimea numerelor reale.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XI-A

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Rezolvaţi, în mulţimea numerelor reale, ecuaţia $\det(A-xI_2)=0$.

b) Determinaţi valorile parametrilor reali m şi n dacă $A^3=m\cdot A+n\cdot I_2$.

c) Demonstraţi că $A^{2013}+A^{2012}=2^{2012}\cdot\left(A+I_2\right)$.

2. O matrice pătratică de ordinul al treilea are toate elementele egale cu 1, 2 sau 3 (cel puţin câte unul din fiecare). Ştiind că suma tuturor elementelor matricei este egală cu 17, iar numărul elementelor egale cu 1 este cel puţin patru, se cere:
a) Să se afle câte elemente sunt din fiecare?
b) Exemplificaţi că printre matricele anterior determinate există atât matrice neinversabile cât şi matrice inversabile.

3. Se consideră funcţia $f_k:(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f_k(x)=\sqrt{x^2+x}-k\cdot x$, unde k este un număr real fixat.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_{2012}(x)}{f_{2013}(x)}$.

b) Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to\infty}f_k(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k=1$

4. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

a) Determinaţi asimptotele verticale ale funcţiei.
b) Determinaţi asimptotele către $+\infty$ ale funcţiei.
c) Demonstraţi că ecuaţia f(x) = 0 admite cel puţin o rădăcină subunitară.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
9 martie 2013

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XII-A

1. a) Calculaţi $F(x)=\int \frac{1}{2^x+3}dx,\ x\in\mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\int_{\log_2 3}^{\log_2 5} \frac{1}{2^x+3}dx$.

c) Demonstraţi că F(x) este o funcţie injectivă pe mulţimea $\mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea $K=(0,\infty)\times\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $(a,x)\circ(b,y)=(ab,x+ay)$, pentru orice perechi $(a,x),(b,y)\in K$.

a) Verificaţi asociativitatea legii de compoziţie.

b) Determinaţi perechea $(a,x)\in K$ care verifică relaţia $\underbrace{(a,x)\circ...\circ(a,x)}_{de 9 ori}=(512,-511)$.

c) Daţi exemplu de o pereche $(a,x)\in K$ care să nu comute cu perechea (2012, -2013).

3. Fie funcţiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definite astfel : $f_1(x)=x$, iar $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt,\ \ n\geq 1$.

a) Demonstraţi că $f_3(x)=\frac{x^3}{6}$.

b) Utilizând metoda inducţiei matematice , să se arate că $f_n(x)=\frac{x^n}{n!}$, pentru orice număr natural nenul n.

4. a) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^3=x$, în inelul $(Z_4,+,\cdot)$.

b) Numim "*potrivită*" o tripletă de tipul $\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b} & \hat{c}\end{pmatrix}$ cu $\hat{a},\hat{b},\hat{c}\in Z_4$ şi $\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=\hat{0}$. Determinaţi tripletele "*potrivite*" de tipul $\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b} & \hat{2}\end{pmatrix}$.

c) Câte triplete "*potrivite*" există ?

.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*